

# Vorwort

Unlängst bin ich auf einen Aufsatz von mir mit dem Titel „Die Neue Mathematik“ gestoßen, der u. a. im Jahresbericht 1975/76 des BRG Steyr veröffentlicht worden ist. Aktueller Anlass dazu war die Diskussion über die „Mengenlehre“, deren Aufnahme in den Mathematikunterricht in der Öffentlichkeit auf wenig Verständnis gestoßen war. Meine Intention war es damals, Verständnis für die Reform zu wecken, aber gleichzeitig ein Maßhalten einzufordern. Jahre später hat dann das (österr.) Unterrichtsministerium die Reform meiner Meinung nach etwas zu weit zurückgenommen, vor allem im Bereich der Strukturmathematik (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume). Denn nicht von ungefähr hat Sir Bertrand RUSSELL (1872 – 1970) den Durchbruch der Mathematik zu einer axiomatisch aufgebauten Strukturwissenschaft mit folgenden Worten gewürdigt: *„Der größte Triumph der Mathematik ist, entdeckt zu haben, was Mathematik wirklich ist.“*

Darum sollte der Mathematikunterricht an Höheren Schulen im Bereich der Algebra zumindest ansatzweise über das klassische Lehrziel ein wenig hinausgehen, das (nach Wikipedia) kurz gesagt folgende Inhalte umfasst: Rechenregeln im Umgang mit Zahlen und mit Ausdrücken, die Variable enthalten, sowie Wege zum Auflösen von Gleichungen. Dasselbe bringen auch die beiden gängigsten Inhaltsangaben des Begriffs „Algebra“ zum Ausdruck, nämlich „Buchstabenrechnen“ und „Gleichungslehre“. Auf derselben Wikipedia-Seite kann dann aber wörtlich nachgelesen werden: „Die abstrakte Algebra ist eine Grundlagendisziplin der modernen Mathematik. Sie beschäftigt sich mit speziellen algebraischen Strukturen wie Gruppen, Ringen und Körpern.“

In dieser Arbeit habe ich nun versucht, das Reifeprüfungswissen über Gleichungen und die zugehörigen Lösungsstrategien in kompakter Form und unter Benützung derselben Techniken darzustellen, die dafür schon immer gegolten haben. Nur hinsichtlich der Fachsprache und ergänzender Hinweise auf Strukturphänomene habe ich der „Modernisierung“ Rechnung getragen, welche im Bereich der wissenschaftlichen Mathematik bereits im 19. Jahrhundert eingesetzt hat und daher keinesfalls mehr als „neu“ bezeichnet werden kann.

Am reinen Rechnen hat sich dadurch aber kaum etwas geändert, abgesehen vom zunehmenden Gebrauch von Taschenrechnern. Das hat vor allem im Bereich der transzendenten Funktionen neue Aufgabenstellungen eröffnet und den Zeitaufwand für deren Bewältigung reduziert. Mit dem Computerrechnen kann ich mich als Mathematiker, der mit seinem Fach vor allem das Bildungsziel verbindet, logisch, strukturiert und ganzheitlich denken zu lernen, aber bis heute nicht anfreunden.

Auch mit Projektunterricht habe ich nie viel anfangen können, weil die Mathematik jedenfalls nach durchkomponierten Lehrgängen verlangt. Gleichwohl wird man nicht immer „bei Adam und Eva“ anfangen können; daher sind auch für das verständnisvolle Nachvollziehen der Inhalte dieses Buches gewisse Grundkenntnisse und Fertigkeiten Voraussetzung. Das betrifft vor allem die Beherrschung des Bruch- und des Potenzrechnens sowie der einfachen algebraischen Rechenoperationen. Den Funktionen habe ich zwar ein kurzes Kapitel gewidmet und diese als Abbildungen vorwiegend von Zahlenmengen aufeinander exakt definiert, doch ist ein darüber hinaus gehendes Wissen, etwa über den Verlauf von Funktionskurven, sicher von Vorteil. Vor allem der Umgang mit Winkelfunktionen sollte geläufig sein. Was Ableitungsfunktionen betrifft sind entsprechende Kenntnisse allerdings nur im Abschnitt über das Newtonsche Näherungsverfahren erforderlich.

Auf das Beifügen einer Aufgabensammlung habe ich verzichtet, weil es dazu ohnehin eine sehr umfangreiche Literatur älteren und neueren Datums gibt. Die durchgeführten Rechenbeispiele dienen ausschließlich der Erläuterung der vorher dargestellten Theorie.

Letztlich hoffe ich, die Gratwanderung zwischen Exaktheit und Verständlichkeit halbwegs gut bewältigt zu haben und dass dieses Buch möglichst vielen Leserinnen und Lesern von Nutzen sein kann.

Dieter Grillmayer

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort	07
<b>1. Mengen und Mengenstrukturen</b>	<b>09</b>
1.1 Mengenbegriffe und Mengensymbole	09
1.2 Zahlenmengen	11
1.3 Gruppen, Ringe, Körper	16
1.4 Vektoren und Vektorräume	20
<b>2. Terme, Funktionen und Gleichungen</b>	<b>25</b>
2.1 Terme, insbesondere Polynome	25
2.2 Funktionen und Funktionsgleichungen	28
2.3 Bestimmungsgleichungen und deren Lösungsmengen	34
2.4 Gleichungssysteme	41
<b>3. Algebraische Gleichungen in einer Variablen</b>	<b>47</b>
3.1 Lineare und quadratische Gleichungen	47
3.2 Der Fundamentalsatz der Algebra	52
3.3 Kreisteilungsgleichungen	57
3.4 Allgemeingültige und unerfüllbare Gleichungen	61
<b>4. Transzendente Gleichungen in einer Variablen</b>	<b>63</b>
4.1 Exponentialgleichungen	63
4.2 Logarithmische Gleichungen	66
4.3 Goniometrische Gleichungen	68
4.4 Das Newtonsche Näherungsverfahren	70
<b>5. Gleichungen in mehreren Variablen</b>	<b>73</b>
5.1 Gleichungen in zwei Variablen	73
5.2 Gleichungen in drei Variablen	79
<b>6. Gleichungssysteme</b>	<b>91</b>
6.1 Lineare Gleichungssysteme	91
6.2 Nichtlineare Gleichungssysteme	101
<b>7. Ergänzungen</b>	<b>107</b>
7.1 Ungleichungen	107
7.2 Diophantische Gleichungen	109
7.3 Homogene Punktkoordinaten	114
Sachregister	121