Dieter GRILLMAYER

Die Neue Mathematik

Inhalt:

VORWORT anlässlich der elektronischen Speicherung (28.12.01)

Dieser Aufsatz wurde im Jahresbericht 1975/76 des Bundesrealgymnasiums Steyr veröffentlicht. Aktueller Anlass war die Diskussion über die „Mengenlehre", deren Aufnahme in den Mathematikunterricht in der Öffentlichkeit zu Recht auf wenig Verständnis gestoßen war. Denn der Unterricht wurde damals großteils von Lehrern vollzogen, die selber über Sinn und Wert der Neuerungen wenig Bescheid wussten und die daher auch nicht wussten, wie weit sie gehen konnten. Auswüchse in den Lehrbüchern taten ein Übriges, um die Modernisierung des Mathematikunterrichts in Misskredit zu bringen. Meine Intention war es damals, Verständnis für die Reform zu wecken, aber gleichzeitig ein Maßhalten einzufordern. Jahre später hat das Unterrichtsministerium die Reform meiner Meinung nach viel zu weit zurückgenommen, vor allem im Bereich der Strukturmathematik (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume).

Da der Aufsatz, unabhängig vom damals aktuellen Anlass, insofern informativ ist, als er einen Einblick in die Denk- und Verfahrensweise der modernen Mathematik gewährt (Abschnitt 1 und 2), vor allem aber im Hinblick auf die didaktischen Überlegungen für den Unterricht (Abschnitt 3, 4 und 6), habe ich ihn für eine allfällige Wiederverwertung elektronisch gespeichert. Abschnitt 5 wurde, da nicht mehr aktuell, weggelassen. Die dort vorgestellten Lehrpläne sind in den Bundesgesetzblättern 295/1967, 275/1970 und 63/1974 enthalten.

1. Die Geometrie von EUKLID bis HILBERT

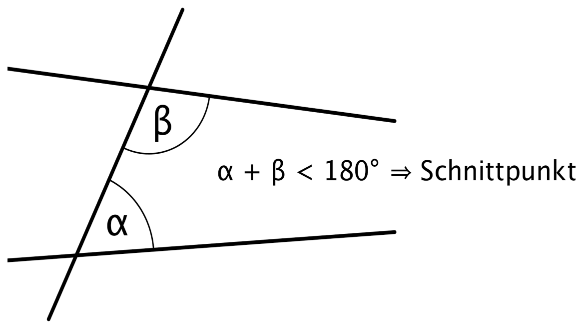
Jede einigermaßen verständliche Beschreibung der gegenwärtigen Lage der Mathematik wird auf die Vergangenheit zurückgreifen müssen. Es soll daher zunächst die Entwicklung, welche zu den heutigen Denk- und Arbeitsmethoden der Wissenschaft geführt hat, am Beispiel der Geometrie skizziert werden. Dies ermöglicht auch einen kleinen Einblick in die Welt der nichteuklidischen Geometrie.

Die Geometrie, welche als eine bescheidene Sammlung empirischer Regeln schon den Babyloniern und Ägyptern bekannt war, erlebte ihre erste Blüte, als die Griechen sie als eine beweisende, systematisch zusammenhängende Wissenschaft aufbauten. Die „Elemente" des EUKLID sind der Höhepunkt dieser Entwicklung. Der Wille zum Beweis erfordert, daß jede Behauptung in klar definierten Begriffen ausgesprochen und allein mittels stichhaltiger logischer Schlüsse aus angegebenen Voraussetzungen und schon bewiesenen Sätzen demonstriert wird. Die Griechen bemerkten sehr rasch, daß diese Vorschriften sich selbst aufheben, wenn man sie konsequent befolgen will: Um einen Begriff zu definieren, braucht man Hilfsbegriffe, diese müssen ebenfalls definiert werden usw. Um einen Satz zu beweisen, braucht man Hilfssätze, die ebenfalls bewiesen werden müssen usw. Man kommt so weder zu einer gültigen Definition noch zu einem zwingenden Beweis. Offenbar bleibt nur übrig, die endlose Kette der Definitionen und Beweise irgendwo zu zerschneiden, d. h. mit einigen Grundsätzen und Grundbegriffen zu beginnen, die für jeden so einfach und einleuchtend sind, daß weitere Erklärungen überflüssig erscheinen. Grundbegriffe dieser Art sind bei EUKLID z. B. „Punkt“, „Gerade“ und „Ebene“; einer der Grundsätze besagt, daß es durch zwei verschiedene Punkte stets eine Gerade gibt. Solche Grundsätze, die unbewiesen am Anfang stehen, heißen Axiome. (EUKLID nennt sie allerdings Postulate, d. h. Forderungen.)

Die Axiome setzen die Grundbegriffe zueinander in Beziehung, und aus diesem dünnen Netz von Beziehungen entsteht nun durch konsequentes Weiterweben der reiche und große Teppich der euklidischen Geometrie. Hier zeigt sich zum erstenmal, daß aus wenigen einfachen Beziehungen eine Fülle von verborgenen, nicht mehr unmittelbar einsichtigen Eigenschaften gewonnen werden kann. Diese Leistung EUKLIDs, die gesamte Geometrie aus wenigen Grundbegriffen herauszuarbeiten, ist eine Wende im menschlichen Denken. KANT hat sie eine „Revolution“ genannt.

Nun hat unter den Axiomen der (ebenen) euklidischen Geometrie das fünfte von Anfang an eine besondere Rolle gespielt. Es lautet: *Wenn eine Gerade zwei andere schneidet und dabei die inneren Winkel, die nach derselben Seite liegen, zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so müssen die Geraden, ins unendliche verlängert, auf der Seite einander schneiden, wo die Winkel liegen, die kleiner sind als zwei Rechte.*

Nun hat unter den Axiomen der (ebenen) euklidischen Geometrie das fünfte von Anfang an eine besondere Rolle gespielt. Es lautet: *Wenn eine Gerade zwei andere schneidet und dabei die inneren Winkel, die nach derselben Seite liegen, zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so müssen die Geraden, ins unendliche verlängert, auf der Seite einander schneiden, wo die Winkel liegen, die kleiner sind als zwei Rechte.*

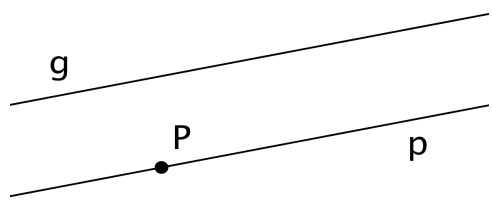


Schon dem Altertum war bei dem 5. Postulat des EUKLID unbehaglich zumute. Man hielt es für zu wenig einfach, um als Axiom gelten zu können, und PROKLUS verlangte deshalb in seinem Kommentar zu den „Elementen“, das 5. Postulat aus der Reihe der Forderungen zu streichen und es aus den anderen Postulaten zu beweisen. Zweitausend Jahre lang bemühten sich Mathematiker um einen solchen Beweis - immer vergeblich. Schließlich kam Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855) nach vergeblichen Beweisversuchen schon als Student auf die Vermutung, daß das 5. Postulat doch nicht beweisbar ist. Das 5. Postulat ist gleichwertig mit der Aussage, daß es durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Geraden g nur eine Parallele*) gibt (Satz 31 bei EUKLID). Das 5. Postulat des EUKLID wird deshalb auch das Parallelenpostulat genannt. Wenn es aus den anderen Postulaten nicht bewiesen werden kann, dann darf man versuchen, es durch die Forderung zu ersetzen, daß es mehrere Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt gibt. Ausgehend von diesem Grundsatz entwickelte GAUSS eine „nichteuklidische“ Geometrie. Er hat sie selbst nie veröffentlicht, weil er sehr wohl wußte, daß sie allen gültigen Vorstellungen radikal zuwiderlief. (Er fürchtete *das Geschrei der Böotier*.) So ist der Ruhm, diese Geometrie entdeckt zu haben, dem russischen Mathematiker LOBATSCHEWSKI und dem Ungarn BOLYAI zuteil geworden.

Das mathematisch wichtigste Ergebnis dieser Entwicklung war zunächst die Lösung des Parallelenproblems. Indem gezeigt werden konnte, daß Geometrien logisch denkbar sind, die ohne das Parallelenpostulat auskommen, war erwiesen, daß dieses Postulat keine logische Folgerung aus den anderen EUKLIDschen Axiomen ist.

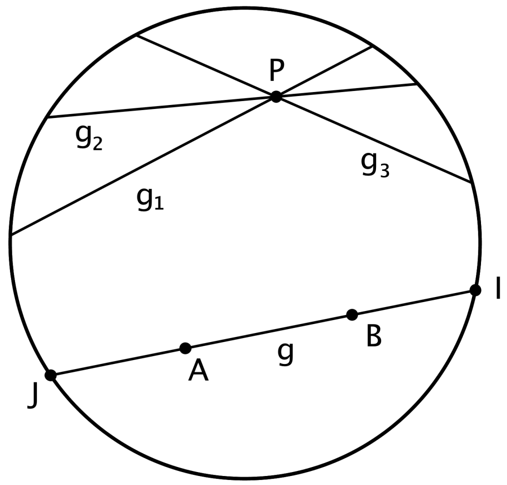
---

*) Der Begriff „Parallele“ oder „gleichlaufende“ Gerade ist für die folgenden Überlegungen in dem Sinn zu verstehen, dass es sich um eine in der von P und g aufgespannten Ebene liegende Gerade p handelt, die mit g keinen (endlichen) Schnittpunkt hat.



Darüber hinaus gaben aber die neuen Erkenntnisse den Anstoß zu einem fundamentalen Wandel im mathematischen Denken. Bis GAUSS wurde in der Mathematik vorwiegend naturwissenschaftlich gedacht und die Geometrie als „Erdmessung“, als Lehre vom Raum betrieben. Davon zeugen auch die Messungen, welche GAUSS an großen Dreiecken durchführen ließ, um allenfalls eine von 180° abweichende Winkelsumme festzustellen; denn die konstante Winkelsumme im Dreieck ist eine direkte Folgerung aus dem Parallelenpostulat (Satz 32 bei EUKLID). In der nichteuklidischen Geometrie wird nun der Übergang vom naturwissenschaftlichen Denken zum spekulativen Denken in der Mathematik vollzogen.

Im Jahr 1871 tat Felix KLEIN mit seinem „Projektiven Modell einer nichteuklidischen Geometrie“ einen entscheidenden Schritt in diese Richtung. Die Grundzüge dieses Modells für den Fall der ebenen (hyperbolischen) Geometrie seien hier kurz skizziert:



Kennzeichnend ist zunächst, daß den Worten „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ eine neue, von der landläufigen Vorstellung verschiedene Bedeutung gegeben wird. Man geht aus von dem Inneren eines Kreises, und dieses Innere ist die „Ebene“, in der die Geometrie betrieben wird. Die „Punkte“ dieser Geometrie sind die gewöhnlichen Punkte im Inneren des Kreises, die „Geraden“ sind die Kreissehnen. Damit diese „Geraden“ unendlich lang sind, wird als Maßzahl für die Länge einer Strecke AB der Zahlenwert ½.(ln d) festgesetzt, worin d das sogenannte „Doppelverhältnis“ (Quotient zweier Teilverhältnisse) der Punkte A, B, I, J ist:

$$\boxed{\mathbf{d = (AI : BI) : (AJ : BJ) = (AI\,.\,BJ) : (BI\,.\,AJ)}}$$

Sowohl für A gegen J als auch für B gegen I geht d und somit auch ½.(ln d) über alle Grenzen, für A = B wird d = 1 und somit ½.(ln d) = 0, wie es sein soll.

In dieser Geometrie hat jede Gerade g also zwei „Fernpunkte“ I und J, und nicht nur einen, wie in der euklidischen Geometrie der Schnittpunkt paralleler Geraden bezeichnet wird. Die mit obgenannter Maßdefinition versehene Geometrie der „Punkte“ und „Geraden“ erfüllt, wie hier nicht explizit gezeigt werden kann, alle Postulate des EUKLID mit Ausnahme des Parallelenpostulates. Denn durch P gehen hier unendlich viele g nicht schneidende Geraden g_1, g_2, g_3, ... Man darf sich nicht daran stoßen, daß die (euklidischen) Verlängerungen etwa von g und g_1 einen Schnittpunkt besitzen. Er liegt außerhalb des Kreises und daher außerhalb der nichteuklidischen Welt. (Die eukl. Geometrie kann bei diesem nichteukl. Modell als jener Sonderfall angesehen werden, bei dem der Kreisradius über alle Grenzen geht. Allerdings muß dafür eine andere Metrik definiert werden.)

Die in das KLEINsche Modell eingegangene entscheidende Gedankenwendung besteht darin, daß die konkrete Natur der geometrischen Grundbegriffe geopfert wird, während die in den Axiomen formulierten Beziehungen zwischen ihnen weiter gelten und damit zum wesentlichen Objekt der mathematischen Forschung werden. Andererseits kann man sich unter KLEINs „Punkten“ und „Geraden“ noch durchaus etwas vorstellen, wie ja die Anschaulichkeit für KLEINs mathematisches Denken kennzeichnend ist (siehe später).

Dennoch ist der Schritt von der Manipulation der geometrischen Begriffe bis zur vollständigen Preisgabe eines konkreten Inhalts, wie ihn David HILBERT vollzieht, nicht mehr allzu groß. Er ist allerdings nur verständlich im Zusammenhang mit der Neukonzeption anderer mathematischer Bereiche, wie der Algebra durch GALOIS (1811 - 1832) und der Schöpfung der Mengenlehre durch Georg CANTOR (1845 - 1918). Trotzdem beruft sich die heutige Mathematik vor allem auf HILBERT; seine Axiomatik, sein Formalismus, sein Strukturdenken sind ihre Fundamente. Sein

1899 erschienenes Buch „Grundlagen der Geometrie“ verdrängte endgültig EUKLIDs „Elemente“ vom Spitzenplatz der geometrischen Bestsellerliste. In der Einleitung heißt es: *Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte..., die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden..., die Dinge des. dritten Systems nennen wir Ebenen... Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „kongruent“, „stetig“; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.*

Wesentlich ist, daß HILBERT nirgendwo sagt, was „Punkte“, „Geraden“, „Ebenen“ sind und daß auch die Natur der Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen sollen, nicht angegeben wird. Es wird nur gefordert, daß die Beziehungen zwischen den Dingen die in den Axiomen geforderten Eigenschaften haben sollen. Das für die Begründung der euklidischen Geometrie (als einer von vielen möglichen Geometrien) notwendige Parallelaxiom hat bei HILBERT folgenden Wortlaut: *Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb von a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene eine und nur eine Gerade, die durch A geht und a nicht schneidet.*

Auch das Wort Axiom selbst hat seinen Sinn völlig gewandelt. War es bis HILBERT eine evident wahre Aussage über (idealisierte) Gegenstände unserer Erfahrung, so ist es nun eine mehr oder weniger willkürliche, aber jedenfalls zweckmäßige Festsetzung zur Begründung eines formalen Systems. Dieses System wird wie bei EUKLID durch logisches Schließen aus den Axiomen aufgebaut, erhebt aber keinen Wahrheitsanspruch mehr. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Axiome weder wahr noch falsch, sondern einfach vorgegeben sind.

So hat die Mathematik durch HILBERT ihr scheinbar wesentlichstes Merkmal verloren. BOURBAKI, von dem noch zu sprechen sein wird, sagt dazu: *Die Mathematiker sind immer überzeugt gewesen, daß sie „Wahrheiten“ oder „wahre Aussagen“ beweisen; eine solche Überzeugung kann nur von gefühlsmäßiger oder metaphysischer Ordnung sein, und es gibt auf dem Gebiet der Mathematik nichts, woraus sich das rechtfertigen ließe, ...*

2. Mathematik als axiomatische Strukturwissenschaft

Es ist zu verstehen, wenn durch das zuletzt Geschilderte der Eindruck entstanden ist, die Mathematik habe sich mit HILBERT auf Abwege begeben und sei ein nutzloses Gedankenspiel geworden. Dazu muß gesagt werden, daß es reiner Mathematik in keinem Stadium ihrer Entwicklung auf den Nutzen ankam; dieser stellte sich oft erst nachträglich heraus und blieb manchmal den Mathematikern, welche die Theorie entwickelt hatten, vollständig unbekannt. Ähnliches ist auch hier der Fall. Gerade durch HILBERTs grundlagentheoretische Arbeiten hat die Mathematik in der Anwendbarkeit eine Ausweitung erfahren, die vorher undenkbar war, und sie hat dabei nichts von ihrem klassischen Bestand verloren.

Ob HILBERTs Denk- und Arbeitsmethode allerdings die für die Mathematik einzig „richtige“ ist, bleibt - ganz im Sinne der modernen mathematischen Auffassungen - offen. Diese Frage ist zwar von erheblicher pädagogischer Bedeutung, wie die folgenden Abschnitte zeigen werden, in der wissenschaftlichen Mathematik spielt sie aber heute kaum eine Rolle. Hier hat sich HILBERTs Standpunkt voll und ganz durchgesetzt. Einen wesentlichen Beitrag dazu leistete BOURBAKI, der auch in der Diskussion um die Reform des Mathematikunterrichts immer wieder hervortritt und mit dem es folgende Bewandtnis hat:

1954 begann eine Gruppe junger Mathematiker, die ganze Wissenschaft in der von HILBERT für die Geometrie inaugurierten axiomatischen Form darzustellen. Basis der Darstellung wurden die formale mathematische Logik und die Mengenlehre. Von diesem Kreis wurde die Mathematik zunächst nach drei „Mutterstrukturen“ geordnet, und zwar nach Ordnungsstrukturen (z.B. Größenvergleich), nach algebraischen Strukturen (z. B. Rechenoperationen) und nach topologischen Strukturen (z. B. Grenzwert). Um diese ordnen sich dann die verschiedenen komplizierten Strukturen an. Seit 1959 veröffentlichte die Gruppe unter dem Pseudonym Nicolas BOURBAKI über 50 Bände ihrer „Elements de Mathematique“ und verhalf so der neuen Betrachtungsweise zum entscheidenden und weltweiten Durchbruch.

Neben dem immer stärker in Erscheinung tretenden Brauchwert des Studiums formaler Systeme mag für den Erfolg BOURBAKIs wohl ausschlaggebend gewesen sein, daß sich niemand, der die Verständnisschwelle überschritten hat, der Faszination entziehen kann, welche die neue Mathematik ausübt. Zu diesem Thema und zur Abrundung des Bisherigen sei nun der Schlußteil eines Aufsatzes mit dem Titel „Das Selbstverständnis der modernen Mathematik“ (Dr. H. HEUSER, IBM-Nachrichten Feb. 1972) wörtlich wiedergegeben:

Das bisher Geschilderte mag deutlich gemacht haben, daß die moderne Mathematik sich nicht mehr allein als Wissenschaft von Zahl und Raum versteht. Ihr Augenmerk richtet sich auf Beziehungen, auf Relationen ohne Rücksicht auf die Relata, also auf das, was zueinander in Beziehung tritt. Letztlich drückt sie damit nur die Grundbeschaffenheit unseres Geistes aus, der nie erkennt, was die Dinge sind - das gescheiterte Anliegen der Metaphysik -, sondern nur feststellen kann, daß die Dinge zueinander in Beziehungen mit gewissen Eigenschaften stehen. Die eigentümliche Leistung der Mathematik besteht nun darin, aus wenigen Primärbeziehungen ein reiches, verwickeltes Geflecht von Sekundärbeziehungen zu erzeugen und damit, im Falle einer konkreten Anwendung, die gesamte logische Struktur eines Gegenstandsbereiches, abgetrennt von seiner Faktizität, zu offenbaren. Die Mathematik produziert mit ihren Beziehungsgeflechten gewissermaßen logische Strukturen auf Vorrat und spricht infolgedessen immer dann mit, wenn Beziehungen zu analysieren und zu logischen Strukturen aufzubauen sind, sie versteht sich folgerichtig als eine Strukturwissenschaft. Kehrt sie aus dem Bereich der Abstraktion in die Wirklichkeit zurück, so feiert sie immer dann Triumphe, wenn sie nachweist, daß äußerlich ganz verschieden aussehende Bereiche die gleiche logische Struktur besitzen, weil zwischen ihren Objekten (äußerlich vielleicht verschieden aussehende) Grundbeziehungen mit denselben Eigenschaften vorhanden sind. ... Die Emanzipation des menschlichen Geistes ist von immer weiter ausgreifenden Abstraktionsprozessen begleitet gewesen. Der Primitive ist ganz der Herrschaft des einzelnen, konkreten Gegenstandes unterworfen, er beseelt ihn und verleiht ihm Kräfte, die sein Leben bestimmen. Der erste befreiende Abstraktionsprozeß besteht darin, Gegenstände mit gleichen Eigenschaften zu Klassen zusammenzufassen und unter einen Begriff zu bringen. Die zweite Stufe der Abstraktion wird erklommen, wenn die empirischen Gegenstände bzw. die Klassen dieser Gegenstände von unwesentlichen, zufälligen Sinnesqualitäten gereinigt werden und auf diese Weise ein Reich idealer, zeitloser Objekte mit ewig gleichen Eigenschaften entsteht, über die wegen der Konstanz ihrer Eigenschaften zeitlos gültige Aussagen gemacht werden können. Diese Stufe wird in der Philosophie von PLATON, in der Mathematik von EUKLID erreicht. Die nächste Stufe des Abstraktionsprozesses finden wir in der modernen Mathematik: die Objekte werden, auch in ihrer idealisierten Form, völlig preisgegeben, Gegenstand des Nachdenkens werden Beziehungen und Strukturen. Wenn die geschichtlichen Analogien nicht trügen, wird diese neue, in der Mathematik vorbereitete Bewußtseinslage den Geist der Zukunft entscheidend umgestalten. Das Vehikel dieser Umgestaltung wird die rapide um sich greifende Mathematisierung immer weiterer Wissenschaften und Lebensbereiche sein, eine Mathematisierung, die gerade durch die hochgradig abstrakte Auffassung der Mathematik als Strukturwissenschaft ermöglicht wird. Gegen eine solche Neuorientierung des Denkens wird sich, wie gegen jede Veränderung, Widerstand aufbauen. Er artikuliert sich schon heute in Herbert MARCUSEs scheinprogressiven „pronunciamentos“. Die geistige Emanzipation, die der Mathematik durch ihr Loslösen von der Wirklichkeit gelungen ist, zeigt sich am deutlichsten in dem enormen Freiheitsraum, den sie sich gewonnen hat. Ohne Rücksicht auf die Realität kann sie ihre Axiome selbst schaffen, nur gebunden durch die Forderung, daß die Axiome logisch miteinander verträglich sind. Die verblüffendsten Wirkungen hat die Betätigung dieser Freiheit in Georg CANTORs Analysen des Unendlichen gezeitigt. Es ist kein Zufall, daß gerade CANTOR den Satz geprägt hat: „Das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit“, und Bertrand RUSSELL hat den Durchbruch der Mathematik zu einer axiomatisch aufgebauten Strukturwissenschaft mit den begeisterten Worten gefeiert: „Der größte Triumph der Mathematik ist, entdeckt zu haben, was Mathematik wirklich ist.“

3. Die KLEINsche Reform des Mathematikunterrichts

Nach diesen Ausführungen über die Grundkonzeption der wissenschaftlichen Mathematik in der Gegenwart soll nun über die Reform des Mathematikunterrichts an höheren Schulen berichtet werden.

Im Jahre 1908 wurde in Rom die „Internationale mathematische Unterrichtskommission“ (IMUK) gegründet; durch ihre Tätigkeit ist die Reform im 20. Jahrhundert weltweit initiiert, gefördert und koordiniert worden. Der erste Vorsitzende der IMUK, der deutsche Mathematiker Felix KLEIN, ist Urheber und Haupt der ersten, nach ihm benannten Reformbewegung unseres Jahrhunderts. Um die Ziele der KLEINschen Reform zu verstehen, muß man zunächst den Zustand um 1900 beschreiben:

Bis etwa 1870 wurde ein vorwiegend wissenschaftlich, nicht pädagogisch oder praktisch orientierter Unterricht erteilt. So wurde z. B. Geometrie nach EUKLIDs „Elementen“ vorgetragen. Unter dem Einfluß von Pädagogen wie PESTALOZZI und HERBART wurde dann zunehmend die Forderung nach einer mehr kindgemäßen Methode erhoben. Ihr wurde durch Einführung propädeutischer Kurse nachgegeben. Die Trennung der reinen Mathematik von der Anwendung rief um 1890 den Protest der Ingenieure hervor. Damit erschien der mathematische Unterricht im Spannungsfeld der Tradition, der Mathematik als Wissenschaft, der Forderungen der Praktiker (Technik und Wirtschaft) und des pädagogischen Denkens.

Alle genannten Strömungen sollten bei der KLEINschen Reform Berücksichtigung finden. So wurde in den „Meraner Vorschlägen“ der „Unterrichtskommission deutscher Naturforscher und Ärzte“ bereits 1905 unter dem maßgeblichen Einfluß Felix KLEINs für die zukünftigen Lehrpläne verbindlich formuliert:

Einmal gilt es (wie in allen anderen Fächern), den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen. Überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeiten zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens. Die von jeher dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt, ja, man kann sagen, daß diese Aufgabe durch die stärkere Pflege der genannten Richtung des mathematischen Unterrichts nur gewinnt, sofern dadurch die Mathematik mit dem sonstigen Interessensbereich des Schülers, in dem sich doch seine logische Fähigkeit betätigen soll, in engere Fühlung gebracht wird.

In diesen Sätzen manifestiert sich KLEINs Denkweise sowohl in methodisch-didaktischer als auch in fachmathematischer Richtung. Statt eines logisch-deduktiven soll ein „genetischer“ Aufbau im Unterricht vollzogen werden. In einem Tätigkeitsbericht der oben genannten Unterrichtskommission von 1908 findet sich dazu folgende Bemerkung KLEINs: *Erster Grundsatz der Schule ist, überall an die Fassungskraft und das natürliche Interesse ihrer Zöglinge anzuknüpfen. Das Vorbild des EUKLID, mit dem man von je das entgegengesetzte Verfahren gestützt hat, ist irreleitend. Man sollte jeder Ausgabe des EUKLID vordrucken, daß der große Verfasser der „Elemente“ ganz gewiß nicht für Knaben geschrieben hat.*

KLEINs mathematisches Anliegen ist in die „Meraner Vorschläge“ mit der Betonung des räumlichen. Anschauungsvermögens und des funktionalen Denkens eingegangen. Wie schon erwähnt, war KLEIN Geometriker. Seine hervorragendsten Leistungen erbrachte er auf dem Gebiet der projektiven Geometrie (projektive Modelle der nichteuklidischen Geometrien) und der Abbildungsgeometrie (kongruente äquiforme, affine, lineare Transformationen). In seinem berühmten „Erlanger Programm“ (1872) wird die Invarianz geometrischer Eigenschaften gegenüber verschiedenen Abbildungen sogar zum ordnenden Prinzip der Geometrie erhoben. Diese Betrachtungsweise charakterisiert er wie folgt: *Was ist das Wesen dieser ganzen Disziplin? Daß wir die einzelne Figur nicht als starr gegegeben ansehen, sondern als transformierbar, als veränderlich, daß wir unseren Gebilden sozusagen organisches Leben erteilen.*

KLEINs Vorliebe für lebendig-produktive Denkprozesse und seine gegenstandsbezogene Arbeitsweise machen es verständlich, daß er der blutleeren Axiomatik HILBERTs und seiner Denkschule skeptisch gegenüberstand. Allerdings bleiben seine erkenntnistheoretischen Ansichten relativ undeutlich, den gedankenlosen Formalismus lehnt er jedoch scharf ab und hält ihn sogar für den „Tod aller Wissenschaft“. So fand auch HILBERTs Mathematikverständnis in KLEINs Reformprogramm keine Berücksichtigung. In diese Richtung ist erst die Modernisierungsbewegung nach dem zweiten Weltkrieg vorgestoßen.

Aber auch die Mehrzahl von KLEINs Intentionen konnte zufolge der desolaten politischen Lage Europas ab 1914 in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts nicht realisiert werden. Neben einer gewissen Berücksichtigung pädagogisch-psychologischer Momente beim Mathematikunterricht ist eigentlich nur die Aufnahme der Infinitesimalrechnung (nach heftigen Diskussionen) in die Lehrpläne der höheren Schulen als konkretes Ergebnis der KLEINschen Reform zu nennen. Das Grundanliegen KLEINs, nämlich das starre EUKLIDsche Denken durch die Schulung an der Transformations- und Invariantentheorie zu überwinden, blieb auf der Strecke, was als Beweis dafür gelten kann, daß ein wirklicher und organisch durchgeführter Neuaufbau der Schulmathematik, wie er der KLEINschen Reformbewegung vorschwebte, nicht stattgefunden hat.

Gleichwohl, oder vielleicht gerade deshalb, ist der bisher geschilderte Sachverhalt wert, festgehalten zu werden, und zwar nicht nur aus Liebe zur Geometrie Felix KLEINs, sondern auch wegen seiner Ausstrahlung auf die Gegenwart. Denn erstens sind bestimmte Tendenzen der heutigen Reform nur als Spätfolgen KLEINschen Wirkens zu verstehen, so etwa die stärkere Betonung abbildungsgeometrischer Gesichtspunkte. Zweitens sind die Gedanken der „Meraner Vorschläge“ nach wie vor lebendig, und in keinem der „modernen“ österreichischen Lehrpläne von 1967, 1970 und 1974 fehlen die Forderungen nach Pflege des geometrischen Anschauungsvermögens, Weckung des funktionalen Denkens und Altersgemäßheit des Unterrichts. Man kann auch KLEINs methodisch-didaktische Grundsätze gar nicht oft genug zitieren zu einer Zeit, wo die BOURBAKI-Mathematik in die Schulen drängt. Schließlich ist KLEINs Denk- und Arbeitsweise auch eine sinnvolle Alternative zu HILBERT für den Fall, daß eine Synthese zwischen genetischem Unterricht und moderner Mathematik unmöglich ist. So ist Felix KLEIN, der 1925 starb, nicht nur für die Wissenschaft, sondern auch für den Unterricht ein Mann von wahrhaft historischer Bedeutung.

4. Die Modernisierungsbewegung

Im Jahre 1952 wurde die IMUK, deren letzte Sitzung vor dem Krieg 1936 stattgefunden hatte, wieder konstituiert. Weder bei ihren Sitzungen noch bei den Tagungen nationaler mathematischer Vereine bewegt sich die Diskussion der folgenden Jahre in extremer Richtung. Lediglich die propädeutische Behandlung der fundamentalen neuen Begriffe Menge, Gruppe, Abbildung usw. wurde als notwendig erachtet, später kam die Forderung nach Einbeziehung der Vektorrechnung hinzu. Im übrigen waren KLEINs Gedanken vorherrschend.

Das Jahr 1958 brachte eine starke Ausweitung der Diskussion und die Forderung nach einer Modernisierung im Sinne der BOURBAKIschen Denkweise trat in den Vordergrund. Die in der Folge immer häufiger vorgebrachte und immer schärfer formulierte Begründung dafür ist der Hinweis auf die Entwicklung der modernen wissenschaftlichen Mathematik. Als eine Stimme für viele zu diesem Thema sei Jean DIEUDONNE, führendes Mitglied des BOURBAKI-Kreises zitiert. In einem Vortrag „Moderne Mathematik und Unterricht auf der Höheren Schule“ skizziert er zunächst kurz, wie die heutige Situation entstand: In den Jahren 1920-1940 ging eine vollständige Umgestaltung in der Klassifizierung der verschiedenen Teilgebiete der Mathematik vor sich, *hervorgerufen durch neue Vorstellungen über das Wesen mathematischen Denkens selbst, die ihren Ursprung in den*

Werken von CANTOR und HILBERT haben. Auf sie geht die systematische Axiomatisierung der gesamten mathematischen Wissenschaft und der fundamentale Begriff der mathematischen Struktur zurück... ...Im Lichte dieser neuen Konzeptionen wurde man dann gewahr, daß der mathematische Elementarunterricht mit seinen unveränderlichen Methoden und Lehrplänen zu einem lebendigen Fossil geworden war, das wegen seiner veralteten Sprache, seinen engen und rückständigen Auffassungen, seinen unglaublich ungeschickten und unzureichenden Methoden vollständig abgeschnitten ist von der derzeitigen mathematischen Forschung... ...Es besteht die Notwendigkeit, den Schüler die Handhabung der axiomatischen Methode zu lehren; darin liegt eine unentbehrliche Vorbereitung auf den Unterricht an der Universität, der zur Zeit ganz auf dieser Methode beruht.

Ob die hier angegebenen Gründe ausgereicht hätten, den Stein ins Rollen zu bringen, ist zweifelhaft. Doch fanden die Verfechter einer radikalen Reform in der Wirtschaft einen mächtigen Bundesgenossen. Denn zu diesem Zeitpunkt konnten die moderne Denkweise und das Studium formaler Systeme in wirtschaftlich-technischen Anwendungen (z.B. Rechenanlagen) bereits erste triumphale Erfolge feiern.

So ging die in der Folge weitestreichende Wirkung auf die Reform von den durch die OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development) einberufenen Seminaren aus, die sich mit der Modernisierung des Mathematikunterrichts befaßten. H. SCHOENE, Delegierter der BRD bei der OECD, beschreibt die Motive der Organisation für diese Initiative wie folgt:

Die OECD ist ursprünglich eine Organisation der Wirtschaft mit wirtschaftlichen Zielsetzungen, z.B. der Steigerung des 1960 vorhandenen Sozialprodukts um 50 Prozent bis zum Jahre 1970 für die der Organisation angeschlossenen Mitgliedstaaten. Die geforderte Entwicklung verlangt aber ein Arbeitskräftepotential (human resources), das in dieser Form nur durch die Schule herangebildet werden kann. "Bildung" ist neben Arbeit und Kapital zu einem entscheidenden Produktionsfaktor geworden, um den wirtschaftlichen Wachstumsprozeß mit Aussicht auf Erfolg zu realisieren. Die Schule, die diese Bildung vermittelt, wobei der Unterschied zwischen Bildung und Ausbildung schon rein sprachlich gar nicht existiert, wird in diesen Produktionsprozeß eingegliedert. Erziehung ist nicht mehr Erziehung zur Person, sondern Heranbildung eines qualifizierten Arbeitskräftepotentials (qualified manpower), weil die moderne Massengesellschaft weniger eine geistige Elite als vielmehr ein gehobenes Bildungsniveau der breiten Massen braucht.

Aus pädagogischer Sicht muß diesen Auffassungen entschieden widersprochen werden. Bildung und Erziehung sind Grundrechte der Persönlichkeit, die nicht einem kurzfristigen Interesse der Wirtschaft geopfert werden können, zumal die Wirtschaft nicht in sich selbst, sondern nur in bezug auf die Menschen, die durch sie leben können, sinnvoll ist.

Es ist auch gar nicht nötig, den Schüler nur als Arbeitskräftepotentialszuwachs anzusehen, um die Reform zu begründen. G. KROPP schreibt in der Zeitschrift „Der Mathematikunterricht“ (11. Jahrgang, Heft 4), unsere Zeit habe *Organisationsformen des gesellschaftlichen, wirtschaftlichen und politischen Lebens entwickelt, die in hohem Maße rational, automatisiert und abstrakt erscheinen. Man mag diese Entwicklung bedauern, es ist jedenfalls weder möglich noch Aufgabe der Schule, das Rad der Entwicklung zurückzudrehen. Wir müssen im Gegenteil, wenn wir für die kommende Generation ein Reservat des Lebendigen erhalten wollen, unsere Schuljugend geistig so trefflich ausrüsten, daß sie den Anforderungen der modernen Massengesellschaft ohne Substanzverlust gewachsen ist.* In diesen Zusammenhang gehört auch eine Äußerung von Marshall STONE, Präsident der IMUK und Präsident des OECD-Seminars von Royaumont bei Paris (Herbst 1959): *So wird der Unterricht der Mathematik immer deutlicher als das wahre Fundament jener technologischen Gesellschaft erkannt, welche zu schaffen die Schicksalsbestimmung unserer Zeit (the destiny of our time) ist. Dieses Schicksal zwingt uns buchstäblich dazu, unseren mathematischen Unterricht zu reformieren.*

Trotz der hier angeführten Momente wäre die Modernisierung wohl noch lange im Stadium theoretischer Erörterungen geblieben, hätten nicht die Amerikaner im Gefolge des „Sputnik-Schocks“ mit der ihnen eigenen Schnelligkeit damit begonnen, die vorliegenden Konzepte zu verwirklichen. Bereits 1962 konnten sie auf einer IMUK-Tagung in Stockholm darüber berichten, was zu einer Welle von Reformversuchen in Europa führte. Bis 1964 waren dann die Modernisierungsgedanken bei den maßgeblichen Persönlichkeiten so weit verbreitet und entsprechende Absichtserklärungen abgegeben, daß die OECD ihre Schularbeit einstellen konnte. Ihr Wirken hat die Reform wesentlich gefördert, da sie durch internationale Koordinierung und ihre finanziellen Möglichkeiten der Modernisierungsbewegung in den einzelnen Ländern Gewicht verlieh.

Klassifiziert man die von alters her an der Reform beteiligten Kräfte nach solchen der Wissenschaft, der Wirtschaft, der Tradition und der Pädagogik, so kann man also sagen, daß sich die Wissenschaft (BOURBAKI) mit Hilfe der Wirtschaft (OECD) durchgesetzt hatte. Abgesehen von dem 1963 erschienenen Buch „Bildung und Mathematik“ Alexander I. WITTENBERGs, auf das noch einzugehen sein wird, traten Pädagogik und Tradition erst bei den Lehrplanarbeiten in Erscheinung. Es kommt zu Auseinandersetzungen zwischen den „Modernisten“ und den „Schulmännern“, die zu einer Verbindung moderner Lehrstoffe mit Inhalten der KLEINschen Reform führen.

Diese Ergebnisse stellen die Modernisierungsbewegung nur teilweise zufrieden. Das wird recht deutlich in einer Stellungnahme von A. REVUZ zum österreichischen Lehrplanentwurf sichtbar, die er während der IMUK-Tagung 1966 in Wien abgegeben hat:

Mit diesem Lehrplanentwurf haben sie sicher einen guten Weg beschritten. Dieser Entwurf kann natürlich nicht als endgültig gelten; es wäre günstig, ihn in 5 Jahren zu überarbeiten. Der österreichische Lehrplanentwurf ist dem neuen französischen Lehrplan, der am 1. Oktober 1966 in Kraft tritt, sehr ähnlich, ja in mancher Hinsicht sogar besser. Wie bei uns in Frankreich, ist es auch Ihnen nicht möglich gewesen, moderne Begriffe der Mathematik in den Lehrplan der Unterstufe aufzunehmen. Es muß wohl unser nächstes Ziel sein, diesen ungünstigen Umstand zu beseitigen. Bei Ihnen, wie bei uns, sind oft die Kommentare besser als der Lehrplan. So wird zum Beispiel im Kommentar mehr von Strukturen als im Text gesprochen. Darin liegt eine Gefahr; in Frankreich, zum Beispiel, lesen die Lehrer den Lehrplan lieber als den Kommentar. Hoffentlich sind die österreichischen Lehrer klüger. Der Lehrplan ist ein Kompromiß; die Gründe dafür kenne ich wohl, nicht alle von ihnen sind wertlos. Der Lehrplan ist ein Übergangslehrplan, und wenn die Lehrer die Kommentare wirklich lesen und auch anwenden, wäre alles in Ordnung... Diese kritischen Bemerkungen sollen aber nicht das Wichtigste vergessen lassen, und das Wichtigste ist, daß Sie den richtigen Weg beschritten haben. Auf diesem Weg sollen Sie nun weitergehen, nicht zu schnell und auch nicht zu langsam... Zum Abschluß meiner Ausführungen möchte ich sagen, daß wir in einer für den Mathematikunterricht verheißungsvollen Zeit leben. Die sogenannte „moderne Mathematik“ veranlaßt uns zu einem modernen Mathematikunterricht, der viel klüger und fruchtbarer als der alte ist und ungeheure Fortschritte ermöglicht. Für dieses Ziel sollen wir alle, die wir an die Mathematik glauben, mit Begeisterung große Anstrengungen leisten!

6. Genetischer Unterricht

Dieser Bericht über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Mathematik wäre unvollständig, wenn nicht wenigstens ein Gegner der Modernisierung darin zu Wort käme. Es ist Alexander I. WITTENBERG, der bereits 1963 in seinem Buch „Bildung und Mathematik“ gegen eine Reform im Sinne BOURBAKIs Stellung bezog und eine Alternative in Form eines exemplarisch-genetischen Unterrichts anbot.

Eine solche Unterrichtsweise, welche das Zustandekommen mathematischer Einsichten nachvollziehen läßt, hatte neben anderen ja schon Felix KLEIN im Auge, in dessen Werk der Ausdruck „genetischer Unterricht“ wiederholt vorkommt. Martin WAGENSCHEIN gab dieser Unterrichtsweise in den Fünfzigerjahren die aus den anthropologischen Gegebenheiten abgeleitete wissenschaftliche Grundlage und methodische Ausgestaltung. Eine ausführliche Darstellung derselben würde den Rahmen dieses Aufsatzes sprengen. Das Wesentliche kommt in den folgenden Passagen aus WITTENBERGs Buch, in dem WAGENSCHEINs pädagogisches Denken auf den Mathematikunterricht angewendet wird, ohnehin zum Ausdruck.

Die Echtheit des mathematischen Unterrichts am Gymnasium beginnt also genau dort, wo wirkliche Mathematik ihren Ursprung hat: bei den Fragestellungen. Sind diese dem Schüler einmal zum Erlebnis geworden, so muß er sich mit ihnen in wahrhaft mathematischer Weise auseinandersetzen. Sie müssen - so elementar sie auch sein mögen - zum Gegenstand mathematischer Tätigkeit werden. Es muß sich also an ihnen dasjenige vollziehen, was für die Mathematik, wie für jedes wissenschaftliche Tun, charakteristisch ist, was aber für die Mathematik in der Schulstube vollumfänglich erfahren werden kann: das allmählich zielsicher und zweckmäßig werdende Ringen des Geistes mit seinem Gegenstand - die anfängliche Hilflosigkeit, die allmähliche Einsicht, das plötzliche Verstehen, der scheinbar vielversprechende, aber irreführende Versuch, das Ahnen verborgener Zusammenhänge, die verführerische Verallgemeinerung, das Erlebnis des zunächst Unbegreiflichen, das unüberwindliche Schwierige, das Selbstverständliche, die Entlarvung des nur scheinbar Selbstverständlichen; das Schmieden zweckmäßiger geistiger Werkzeuge, das Prägen adäquater Begriffe, das schöpferisch-kritische Neudurchdenken des bereits Erreichten; das allmähliche Zustandekommen des Überblicks, die Schaffung einer folgerichtigen, systematischen, in sich verhältnismäßig geschlossenen Theorie; das allmählich erstarkende Erleben des Besitzes geistiger Macht, der Fähigkeit zu eigener Einsicht im eigenen Denken. All das muß im Studium des Schülers zur Wirklichkeit werden, wie es im Tun des schöpferischen Mathematikers Wirklichkeit ist. Dann wird jenes Studium dem Ziel gerecht werden, den Schüler erfahren zu lassen, was Mathematik wirklich ist.

Von dieser Beschreibung des Entstehens mathematischer Einsichten ausgehend entwickelt WITTENBERG seine Kritik an einem Unterricht, der die Schüler mit dem Ergebnis langen wissenschaftlichen Bemühens zu einem Zeltpunkt konfrontiert, wo dieses Ergebnis, nämlich die moderne Mathematik, in keinerlei Zusammenhang mit der Erfahrungswelt des Lernenden steht:

Unglückliche Schüler, die nie genau verstanden haben, was es mit der Quadratwurzel von 2 auf sich hat oder wieso ein vernünftiger Mensch sich für analytische Geometrie interessieren kann, werden mit Differential- und Integralrechnung, mit abstrakten algebraischen und mengentheoretischen Begriffen, womöglich sogar mit symbolischer Logik, heimgesucht. ... Es handelt sich oft um nicht viel besseres als eine Nachäffung höherer Mathematik, bei der völlig verkannt wird, daß die frappanten äußeren Züge der modernen Mathematik - Allgemeinheit, axiomatische Begründung, formaler Aufbau, Strenge - ihr allmähliches Zustandekommen nicht einer Laune der Mathematiker, sondern organischen Notwendigkeiten verdanken, die dem begrenzten Erfahrungsbereich des Gymnasiasten größtenteils fremd bleiben müssen. Aus dem historischen und sachlichen Zusammenhang dieser Notwendigkeiten gerissen, werden sie aber sinnlos, und damit durch und durch unmathematisch...... In der höheren Mathematik werden jene Begriffe und Methoden nicht um ihrer selbst willen eingeführt, sondern weil sie mathematisch etwas leisten - sie dienen dazu, neuartige mathematische Erkenntnisse zu gewinnen. Wäre dem nicht so, so würde sich kein schöpferischer Mathematiker dazu hergeben, auch nur einen Gedanken daran zu verschwenden. Am Gymnasium leisten sie aber charakteristischerweise nichts. Sie bleiben Selbstzweck - und damit Unsinn.

WITTENBERG stellt also die wissenschaftliche Mathematik in der von BOURBAKI geschaffenen Form nicht in Frage, möchte sie aber als mit dem genetischen Prinzip unvereinbar von der Schule fernhalten. Für den Unterricht empfiehlt er einfache „klassische“ Stoffgebiete, an denen das Werden mathematischer Erkenntnisse erfahrbar zu machen ist. Sogar die seit Jahrzehnten eingeführte Infinitesimalrechnung sollte aus den Lehrplänen verbannt werden. WITTENBERG forderte also eine Reform des Mathematikunterrichts nach rein pädagogischen Gesichtspunkten.

Wenn man bedenkt, wie weit die Modernisierungsbewegung 1965 ihre Ziele schon vorangetrieben hatte und welche Unterstützung sie genoß, dann wird der geringe Einfluß, den WITTENBERG mit seinem extremen Gegenstandpunkt auf die Entwicklung nehmen konnte, verständlich. Die ausgezeichnete Darstellung eines pädagogisch konzipierten Mathematikunterrichts in seinem Buch ist aber doch nicht ganz wirkungslos geblieben. So haben in der Folge mehrere Reformer versucht, eine Verbindung zwischen genetischem Lehren und moderner Mathematik herzustellen. In diesem Zusammenhang ist vor allem H. G. STEINER zu nennen, der in verschiedenen Aufsätzen genetische Versuche in moderner Richtung publiziert hat.

Auch die österreichischen Lehrpläne sehen diese Kombination prinzipiell vor: Einerseits wird in den allgemeinen didaktischen Grundsätzen ein altersgemäßer, lebensnaher, anschaulicher und die Selbsttätigkeit des Schülers fördernder, also ein genetischer Unterricht verlangt, andererseits ist im Mathematiklehrplan eine Fülle moderner Begriffe, Methoden und Gedankengänge enthalten. Dieser Stoffumfang und die frühzeitige Einführung abstrakter Begriffe und Symbole, wie sie der Lehrplan zur Erzielung eines möglichst großen Wiederholungseffektes vorsieht, machen aber ein genetisches Lehren im strengen (WAGENSCHEINschen) Sinn unmöglich. Was dem Mathematikunterricht dadurch unter Umständen an lebendig-produktivem Geschehen und allgemeinem Bildungswert verloren geht und welche Gefahren damit verbunden sind, kann bei WITTENBERG nachgelesen werden. Diese Mängel hintanzuhalten, ohne die Vermittlung der im Lehrplan aufgezählten Kenntnisse zu vernachlässigen, bleibt dem pädagogischen und didaktischen Geschick des einzelnen Lehrers überlassen. Er wird dieser schwierigen Aufgabe umso eher gerecht werden, je besser er selbst über die Entwicklung und die neue Grundkonzeption seiner Wissenschaft informiert ist. Denn nur dieses Wissen befähigt ihn dazu, aus den Lehrplänen (und den neuen Lehrbüchern!) das Wesentliche und dem Schüler Zumutbare in angemessenem Umfang herauszuschälen und einem möglichst genetischen Unterricht einzufügen.

Vor allem aber muß berücksichtigt werden, daß dem allgemeinen Bildungsziel der AHS unbedingter Vorrang gegenüber jedem Fachwissen zukommt. Zur höheren Allgemeinbildung und zur Hochschulreife in der von den Lehrplänen definierten Bedeutung gehören heute natürlich gewisse Grundkenntnisse in moderner Mathematik; ihre Symbolik, ihre Fachsprache, ihre Rechen- und Beweisverfahren sind aus der Kultur unserer Zeit nicht mehr wegzudenken, und es ist für einen Gebildeten kein Kavaliersdelikt mehr, von Mathematik nichts zu verstehen. In erster Linie sollen aber die Schüler befähigt werden, *große Zusammenhänge zu überblicken, ..., in kritischer Prüfung Probleme zu klären, ..., Wesentliches von Unwesentlichem zu unterscheiden, sachlich und logisch zu denken und sich sprachlich genau und klar auszudrücken.* Der Mathematikunterricht wurde immer als besonders prägend für diese Kennzeichen der Allgemeinbildung angesehen. Er kann aber gerade diese Funktion nur erfüllen, wenn er in sich (und nicht nur im Hinblick auf die Hochschulmathematik) sinnvoll ist. Dazu wird er zwei Grundregeln beachten müssen:

1.) Der Unterricht hat von Problemen auszugehen, die dem Schüler als solche überhaupt begreiflich zu machen sind, und er muß im Verständlichmachen des Problems sein erstes Ziel sehen.

2.) Fachsprache und Symbolik sind nur dort und in dem Umfang einzusetzen, wo mit ihnen ein echter Gewinn an Präzision, Systematik und Ökonomie zu erzielen ist. Wird ein solcher Vorteil nicht erkannt, dann werden Fachsprache und Symbolik (zu Recht) als sinnloser Ballast empfunden.

Eine gewisse Sonderstellung nehmen in diesem Zusammenhang die fälschlicherweise unter dem Schlagwort „Mengenlehre“ eingeführten Begriffe und Symbole ein. (Dieses in der Diskussion gebrauchte Schlagwort hat nur wenig mit der Mengenlehre, also Georg CANTORs Lehre von den Mächtigkeiten, zu tun.) Da die Mengenbegriffe und die Mengensymbolik zu den wichtigsten Grundlagen der modernen wissenschaftlichen Betrachtungs- und Darstellungsweise gehören, kann man ihren Sinn letzlich erst dann verstehen, wenn man über die gesamte Neukonzeption der mathematischen Wissenschaft Bescheid weiß. Für AHS-Schüler, die zu einem gewissen Verständnis der modernen Mathematik geführt werden sollen, ist ein Grundwissen in „Mengenlehre“ also durchaus notwendig und gewinnt in Verbindung mit den nachfolgenden Stoffgebieten zunehmend Sinn. Für ihre Eltern ist das hingegen nicht der Fall, weshalb auch die entsprechenden Volkshochschulkurse recht problematisch sind. Die Erfahrung zeigt übrigens, daß die Kinder mit der „Mengenlehre“ ganz gut zurechtkommen, wenn sie auf das Notwendige beschränkt und altersgemäß gebracht wird. So macht etwa der Mengenbegriff selbst überhaupt keine Schwierigkeiten, wenn er an Dingen erläutert wird, die der Schüler de facto unter einem Begriff vereinigen kann. Er wird aber (außer für den geschulten Mathematiker) vollkommen unverständlich, wenn die Elemente „Pfirsich, Schornstein, Lebensfreude“ eine Menge bilden sollen.

Dieses kleine Beispiel soll auch andeuten, wo die Grenzen zwischen Schulmathematik und Wissenschaft zu ziehen sind. Das streng gegenstandslose HILBERTsche Denken wird in der Schule weder gelehrt noch nachvollzogen werden können. Denn indem es das Abstraktionsvermögen des Schülers übersteigt (Ausnahmen bestätigen die Regel), gewöhnt es ihn höchstens an die Handhabung eines gedankenlosen Formalismus, womit weder das mathematische noch das allgemeine Bildungsziel der AHS erreicht wird.

Natürlich gibt es Stufen der Abstraktion und des Verständnisses. Jeder Mathematiklehrer wird sich bemühen, mit seinen Schülern möglichst weit auf ihnen emporzusteigen. Wenn er dabei der geistesgeschichtlichen Entwicklung folgt, wie sie im ersten Abschnitt dieses Aufsatzes angedeutet ist, dann wird Felix KLEINs anschaulich-produktives Denken in Modellen sicher erreicht werden können. Dieser Standort erscheint überhaupt für das ganze in Frage stehende Problem bestens geeignet: Erstens erlaubt er noch einen genetischen Unterricht, andererseits ermöglicht er bereits Ausblicke in die HILBERTsche Richtung. Mit solchen Ausblicken wird ja auch dem Lehrplan Genüge getan, dessen letzter Satz lautet: *Dieser abschließende Überblick über die Mathematik soll das Verständnis für ihre modernen Denkweisen und Arbeitsmethoden wecken.*

Abschließend ist zu bemerken, daß an der AHS kein Fach die Aufgabe hat, eine Berufsausbildung vorwegzunehmen oder die Schüler für bestimmte Berufe zu determinieren. Alle Fächer zusammen sollen vielmehr dazu beitragen, daß die Schule einen in seinem Kulturkreis, seiner Zeit und seiner Umwelt Eingewurzelten, einen von Vorurteilen und Zwangsvorstellungen freien, über sich selbst und für sich selbst Verfügbaren und Verantwortlichen, kurz, einen Gebildeten entläßt, oder zumindest einen jungen Menschen, der dazu auf dem Weg ist. Hat er später mit Mathematik zu tun, so wird er eine seinen speziellen Bedürfnissen entsprechende Ausbildung noch erhalten. Der Mathematikunterricht wird sich daher mit der Weckung eines prinzipiellen Verständnisses für die neueren Denk- und Arbeitsmethoden sowie der Entwicklung echter mathematischer Fähigkeiten, die immer und überall von Nutzen sind, begnügen können.

Literaturverzeichnis:

BEHNKE-HLAWKA-LAUB-STEINER: Die Neugestaltung des Mathematik-Unterrichts an den höheren Schulen, Stuttgart 1969.

BOURBAKI, Nicolas: Elements de Mathematique, Livre I, Paris 1957.

EUKLID: Die Elemente, Buch I - XIII, herausgegeben und ins Deutsche übersetzt v. Clemens THAER, Darmstadt 1962.

GUTZMER, A.: Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, Leipzig 1908.

HEUSER, Harro: Das Selbstverständnis der modernen Mathematik, IBM-Nachrichten Nr. 209, Feb. 1972.

HILBERT, David: Die Grundlagen der Geometrie, 10. Aufl., Stuttgart 1968.

SCHUBERTH, Ernst: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, Stuttgart 1971.

WITTENBERG, Alexander Israel: Bildung und Mathematik, Stuttgart 1965.

WUNDERLICH, Walter: Vorlesungen über Nichteuklidische und mehrdimensionale Geometrie, Wintersemester 1963/64, TU Wien.