

Keplers Weltgeheimnis

Von Dieter Grillmayer

Gott hat seinem Schöpfungsplan des heliozentrischen Systems (Mittelpunkt S) die fünf platonischen Körper zugrunde gelegt. Merkur und Venus bewegen sich auf zwei Sphären mit dem Mittelpunkt S, die als In- bzw. Umkugel eines regulären Oktaeders in Frage kommen. Die Umkugel des Oktaeders ist die Inkugel eines regulären Ikosaeders, auf dessen Umkugel sich die Erde bewegt. Diese wiederum ist die Inkugel eines regulären Dodekaeders, auf dessen Umkugel die Bahn des Mars liegt. Sie ist Inkugel eines regulären Tetraeders, auf dessen Umkugel der Jupiter wandelt. Letztlich ist diese wiederum die Inkugel eines Würfels, auf dessen Umkugel die Saturnbahn liegt. In der dazu existenten historischen Zeichnung (Fig. 1), die dem Aufsatz „Sphärische Vielecke“ von Hans Walser entnommen ist, sind nur die beiden größten Polyeder, nämlich das Tetraeder und der Würfel deutlich erkennbar.

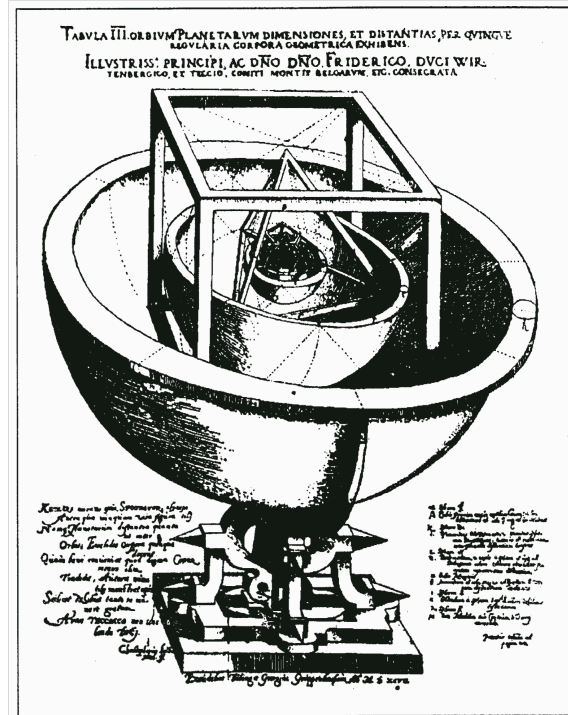


Fig. 1

Diese These vertrat Johannes Kepler in seinem Erstlingswerk „Das Weltgeheimnis“. Sie hält den tatsächlichen Verhältnissen nicht nur deswegen nicht Stand, weil die Planetenbahnen (nach Keplers eigenen späteren Erkenntnissen) Ellipsen sind, die auf Kugelflächen bekanntlich nicht vorkommen, sondern auch, weil die mittleren Abstände der genannten Planeten von der Sonne – siehe die folgende Tabelle – den Relationen der jeweiligen Kugelradien nur sehr unzulänglich genügen.

MERKUR	0060 Mio. km
VENUS	0108 Mio. km
ERDE	0150 Mio. km
MARS	0225 Mio. km
JUPITER	0775 Mio. km
SATURN	1420 Mio. km
URANUS	2870 Mio. km
NEPTUN	4500 Mio. km

Am ehesten stimmt das Verhältnis zwischen den mittleren Abständen des Merkur und der Venus mit der Relation $1 : \sqrt{3}$ des Inkugelradius zum Umkugelradius des regulären Oktaeders überein: (60 Mio. km). $\sqrt{3} \approx 104$ Mio. km statt 108 Mio. km. Die Abweichung beträgt also rund 3,8 %.

Der Inkugelradius des Ikosaeders verhält sich zum Umkugelradius wie $1 : \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$, wie z. B. anhand von Fig. 1.6.7 (Seite 62) in Teil II meines Buches „Im Reich der Geometrie“ unter Benützung der in Teil I auf den Seiten 58 und 59 abgeleiteten Formeln für den Umkreisradius des regelmäßigen Fünfecks und die zugehörige Zehnecksseite berechnet werden kann. (Diese Herleitung wäre ebenso wie die analoge Aufgabe beim Dodekaeder möglicherweise auch als Thema einer vorwissenschaftlichen Arbeit im Rahmen der neuen Matura zu gebrauchen.) Der

oben genannten Wurzel entspricht als Dezimalzahl ein Wert von ca. 1,26. Bezogen auf die Venus würde das nach Keplers Weltgeheimnis für die Erdbahn einen mittleren Sonnenabstand von $(108 \text{ Mio. km}) \cdot 1,26 \approx 136 \text{ Mio. km}$ ergeben, der „Fehler“ beträgt als bereits rund 14 Mio. km oder 10,3 %.

So wie dem Würfel ein reguläres Oktaeder eingeschrieben werden kann, dessen Umkugel die Inkugel des Würfels ist, und dem Oktaeder wiederum ein Würfel, dessen Umkugel die Inkugel des Oktaeders ist (Fig. 2), usw., so kann auch dem regulären Dodekaeder ein Ikosaeder eingeschrieben werden, dessen Umkugel die Inkugel des Dodekaeders ist, usw. Allein aus diesem Zusammenhang schon ergibt sich die Verhältnismöglichkeit zwischen Inkugelradius und Umkugelradius bei diesen „dualen“ Körpern. (Die Eckenzahl des einen entspricht der Flächenzahl des anderen, beide haben gleich viele Kanten. Fig. 2 wurde von OStR. Mag. Wilhelm Nowak gezeichnet.)

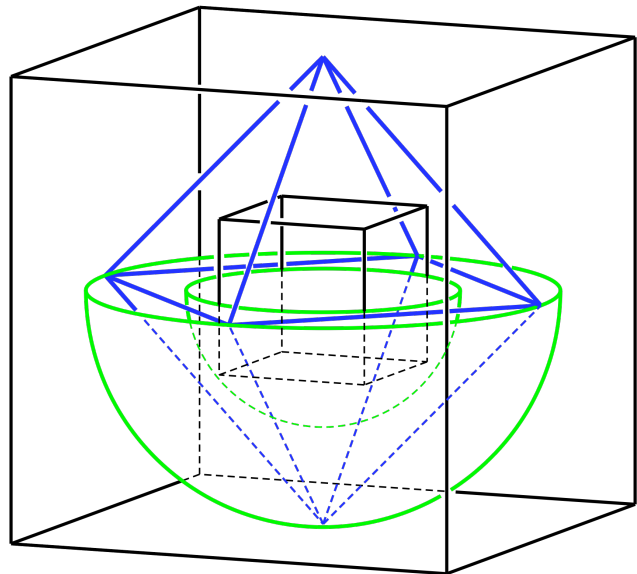


Fig. 2

Beim Würfel und beim Oktaeder beträgt dieses Verhältnis $1 : \sqrt{3}$, beim Dodekaeder und beim Ikosaeder $1 : \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$. Wer sich durch ein richtiges Ergebnis für die Mühe einer aufwändigen Rechnung belohnt sieht, dem kann ich die von dieser Überlegung unabhängige Berechnung für das reguläre Dodekaeder (z. B. anhand von Fig. 1.6.6 in Teil II meines bereits erwähnten Buches) bestens empfehlen.

Bezogen auf unsere Erde würde nach Keplers Weltgeheimnis für den Mars ein mittlerer Sonnenabstand von $(150 \text{ Mio. km}) \cdot 1,26 \approx 189 \text{ Mio. km}$ herauskommen, die Abweichung von der Realität beträgt also bereits rund 36 Mio. km (19 %) und konnte wohl auch schon vor rund 400 Jahren durch allfällige Messfehler nicht mehr erklärt werden. (Allerdings standen Kepler zum Zeitpunkt der Publikation seines Weltgeheimnisses die Messdaten Tycho Brahes noch nicht zur Verfügung. Erst als dessen Nachfolger auf dem Hof Kaiser Rudolf II. in Prag konnte er sich der zu dieser Zeit genauesten Messergebnisse bedienen und hat anhand von Brahes Daten für die Marsbahn deren Ellipsenform erkannt.)

Läge die Bahn des Mars auf der Inkugel eines regulären Tetraeders, dessen Umkugel die Flugbahn des Jupiter trägt, so müsste dessen mittlerer Sonnenabstand – wegen des für das Tetraeder geltenden Radienverhältnisses von $1 : 3$ – etwa $(225 \text{ Mio. km}) \cdot 3 \approx 675 \text{ Mio. km}$ betragen; in Wirklichkeit sind es um 100 Mio. km (14,8 %) mehr. Vergleichsweise klein ist hingegen die Abweichung zwischen dem mittleren Sonnenabstand des Saturn nach Keplers Weltgeheimnis, bezogen auf den Jupiter, und dem tatsächlichen Mittelwert: Inkugel- und Umkugelradius des Würfels verhalten sich wie $1 : \sqrt{3}$, $(775 \text{ Mio. km}) \cdot \sqrt{3} \approx 1.342 \text{ Mio. km}$, also beträgt der „Fehler“ nur ca. 78 Mio. km (5,8 %).

Schlussbemerkung: Kepler war zeitlebens ein gläubiger Protestant, was sich im katholischen Habsburgerreich mehrmals (z. B. in Graz) nachteilig für ihn auswirkte. Sein Weltgeheimnis ist ein Beleg dafür, wie seine Religiosität und die Mathematik sein Weltbild bestimmten, solange

Messergebnisse fehlten bzw. zu ungenau waren und die Physik keinen Beitrag dazu leistete bzw. noch nicht leisten konnte.

Literatur:

PADOVA Thomas de, Das Weltgeheimnis; Kepler, Galilei und die Vermessung des Himmels, ISBN 978-3-492-25861-6, Piper Verlag GmbH, München 2009, 352 Seiten

GRILLMAYER Dieter, Im Reich der Geometrie I, ISBN 978-3-8370-23350-0, Books on Demand GmbH, Norderstedt 2009, 196 Seiten, € 19,80

GRILLMAYER Dieter, Im Reich der Geometrie II, ISBN 978-3-8391-5593-6, Books on Demand GmbH, Norderstedt 2010, 212 Seiten, € 19,80